NOVEMBER/DECEMBER 2024

CMA53 — COMPLEX ANALYSIS – I

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SHANMUGA INDUSTRIES ARTS & SCIENCE COLLEGE LIBRARY

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL the questions.

1. Evaluate $\frac{-1+3i}{2-i}$.

   $\frac{-1+3i}{2-i}$ மதிப்பு காண்க.

2. Find the modulus of $\frac{(2-i)(1+i)}{1-i}$.

   $\frac{(2-i)(1+i)}{1-i}$ இன் குணகத்தைக் கண்டறியவும்.

3. What is an Entire function?

   முழுச் சார்பு என்றால் என்ன?

4. Prove that the function $f(z) = z^2$ is differentiable at every point and $f'(z) = 2z$.

   $f(z) = z^2$ எனும் சார்பு ஒவ்வொரு புள்ளிகளிலும் வகையிடத்தக்கவை மற்றும் $f'(z) = 2z$ எனவும் நிரூபி.

13. (a) Show that $u = \sin x \cosh y + 2\cos x \sin hy + x^2 - y^2 + 4xy$ is harmonic. Also find the analytic function $f(z)$ such that $f(z) = u + iv$.

$u = \sin x \cosh y + 2\cos x \sin hy + x^2 - y^2 + 4xy$ ஒரு இசைச் சார்பு என காட்டுக. மேலும் $f(z) = u + iv$ என்றவாறு உள்ள பகுமுறை சார்பு $f(z)$ -யை காண்க.

Or

(b) Give the properties of conformal mapping.

இணங்கும் கோர்த்தலின் பண்புகளைத் தருக.

14. (a) Show that the region in the $z-$plane given by $x > 0$ and $0 < y < 2$ is mapped into the region in the $w-$ plane given by $-1 < u < 1$ and $v > 0$ under the transformation $w = iz + 1$.

$w = iz + 1$ என்ற உருமாற்றத்தில் $z-$தளத்தில் $x > 0$ மற்றும் $0 < y < 2$ உள்ள பகுதி $w-$தளத்தில் $-1 < u < 1$ மற்றும் $v > 0$ என்பதைக் காட்டு.

Or

(b) Find the fixed points of $w = \dfrac{z-1}{z+1}$.

$w = \dfrac{z-1}{z+1}$ ன் நிலை புள்ளிகளை காண்க.

KARPAGA VINAYAGA INSTITUTES ARTS & SCIENCE COLLEGE LIBRARY

15. (a) Evaluate $\int_C f(z)\,dz$ if C is $|z| = 1$ and $f(z) = \bar{z}$.

C என்பது $|z| = 1$ மற்றும் $f(z) = \bar{z}$ எனில் $\int_C f(z)\,dz$ என்ற தொகையின் மதிப்புக் காண்க.

Or

(b) If a function f is analytic at a point then prove that its derivatives of all orders are also analytic functions at that point.

f என்ற சார்பு ஒரு புள்ளியில் பகுமுறை எனில் அதனுடைய அனைத்து வரிசை வகைக்கெழுக்களும் அதே புள்ளியில் பகுமுறை சார்பாகும் என நிறுவுக.

SECTION C — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

16. If $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ and $w_0 = u_0 + iv_0$ then prove that $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ iff $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ and $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$.

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ மற்றும் $w_0 = u_0 + iv_0$ எனில் $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனைகள் $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ மற்றும் $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$ என நிறுவுக.